Optimizacija elektronskih kola
(1/2)

Algoritam optimizacije

Algoritam optimizacije

Cilj:

Odrediti vrednosti parametara kola $\underline{p}=[p_1\ p_2, \ldots\ p_n]^T$ koje će garantovati da odziv $F(x, \underline{p})$ ima željenu vrednost $F^*(x)$.

Metod:

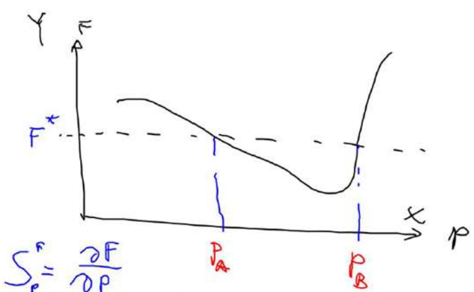
Traženje minimuma funkcije greške $E(x,p)$; (norma za kvantitativnu procenu odstupanja dobijenog od željenog odziva).

$$E(x,p)= |F(x, \underline{p}) - F^*(x)|$$

E je nelinearna funkcija od $\underline{p}$.

Kako odrediti minimum?

Tačka u kojoj je prvi izvod jednak nuli

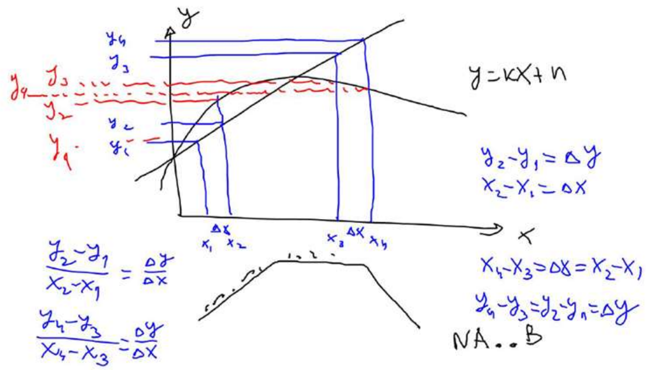


$S_p^F = \frac{\partial F}{\partial p}$

$S_x^Y = \frac{dY}{dx}$

Koje značenje ima prvi izvod funkcije?

Definiše „nagib" – kako se menja y u fukciji x



Koje značenje ima prvi izvod funkcije?

Za koliko se promeni y ako se x promeni za Δx

izvod>0:

y - raste

Izvod<0:

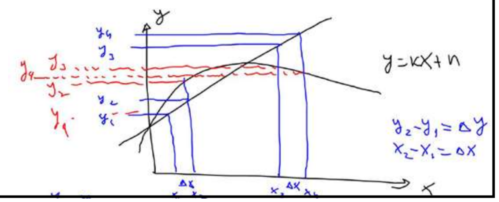
y - opada

Izvod veći:

nagib veći

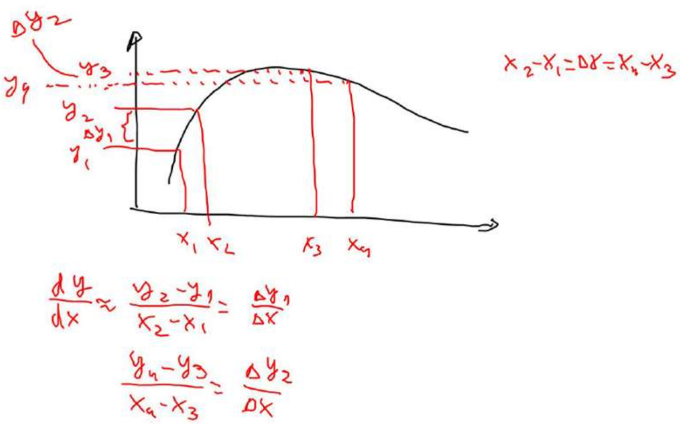
Izvod=0:

y - konstantno



Koje značenje ima prvi izvod funkcije?

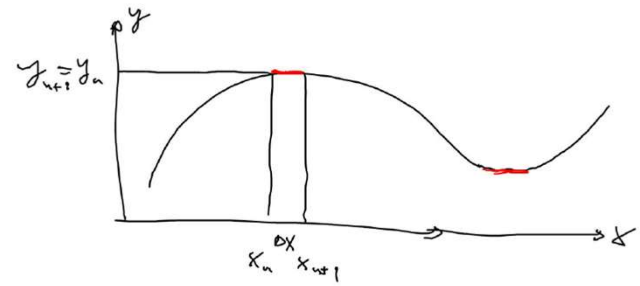
Za koliko se promeni y ako se x promeni za Δx



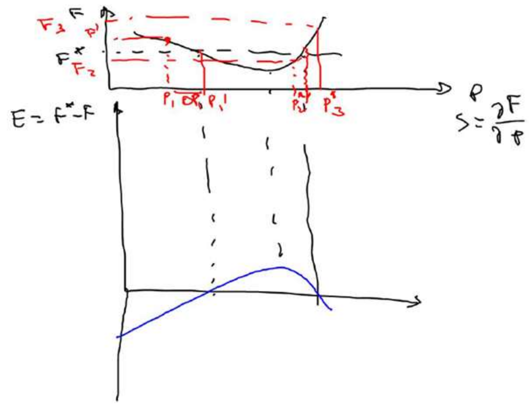
Koje značenje ima prvi izvod funkcije?

Za koliko se promeni y ako se x promeni za Δx

Izvod=0: y - konstantno



Oprimizacija = traženje minimuma funkcije greške



Algoritam optimizacije

1. Određivanje početnog rešenja
2. Izračunavanje funkcije greške
3. Provera konvergencije
4. Izračunavanje korekcije parametara
5. Korekcija vrednosti parametara

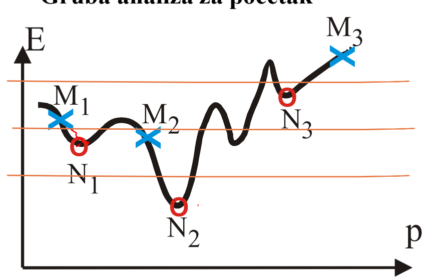
Algoritam optimizacije

1. Određivanje početnog rešenja

 -Problemi vezani za početak iterativnog procesa

 -Lokalni i globalni minimum.

 -Gruba analiza za početak



Algoritam optimizacije

2. Izračunavanje funkcije greške

1. Apsolutna greška

$$E^{j}_{1,i}=w(x_i)[F^*(x_i)-F(x_i,\underline{p}^j)]$$

2. Srednjekvadratna greška

$$E^j_2=\sum_{i=1}^{m}\left\{w(x_i)\left[F^*(x_i)-F(x_i,\underline{p}^j)\right]^2\right\}$$

$$E^j_2=\int_a^b\left\{w(x)\left[F^*(x)-F(x,\underline{p}^j)\right]\right\}^2 dx$$

3. Maksimalna greška

$$E^j_3=\max_{a\le x\le b}\left\{w(x)\left[F^*(x)-F(x,\underline{p}^j)\right]\right\}$$

Algoritam optimizacije

3. Izračunavanje korekcije parametara

Razvoj funkcije $E_i(\underline{p})$ u red u okolini tačke p^j i zadržavanje na linearnom članu:

$$E_i = E_i^j + \sum_{k=1}^{n} \left.\frac{\partial E_i}{\partial p_k}\right|_{p_k=p_k^j} (p_k - p_k^j) + \cancel{\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} \left.\frac{\partial^2 E_i}{\partial p_k^2}\right|_{p_k=p_k^j} \cdot (p_k - p_k^j)\right)^2} + \dots$$

$$E_i^{j+1} = E_i^j + \sum_{k=1}^{n} \left.\frac{\partial E_i}{\partial p_k}\right|_{p_k=p_k^j} \cdot (p_k^{j+1} - p_k^j) = E_i^j + \sum_{k=1}^{n} \left.\frac{\partial E_i}{\partial p_k}\right|_{p_k=p_k^j} \cdot \Delta p_k^{j+1}$$

Algoritam optimizacije

3. Izračunavanje korekcije parametara

Izjednačavanje linearizovane funkcije greške Ei($\underline{p}$) sa nulom:

$$E_i^{j+1} = E_i^j + \sum_{k=1}^{n} \left.\frac{\partial E_i}{\partial p_k}\right|_{p_k=p_k^j} \cdot \Delta p_k^{j+1} = 0, \qquad i = 1,\dots,m$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left.\frac{\partial E_i}{\partial p_k}\right|_{p_k=p_k^j} \cdot \Delta p_k^{j+1} = -E_i^j, \qquad i = 1,\dots,m$$

Algoritam optimizacije

3. Izračunavanje korekcije parametara

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial E_1}{\partial p_1} & \frac{\partial E_1}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial E_1}{\partial p_n} \\ \frac{\partial E_2}{\partial p_1} & \frac{\partial E_2}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial E_2}{\partial p_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial E_m}{\partial p_1} & \frac{\partial E_m}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial E_m}{\partial p_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta p_1^{j+1} \\ \Delta p_2^{j+1} \\ \vdots \\ \Delta p_n^{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E_1^j \\ -E_2^j \\ \vdots \\ -E_m^j \end{bmatrix}$$

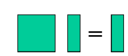
dimenzije sistema (m – jednačina)x(n-promenljivih)
m=broj uslova, n=broj parametara

Algoritam optimizacije

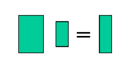
3. Izračunavanje korekcije parametara

Mogući slučajevi

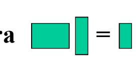
m = n; broj uslova jednak broju parametara



m > n; broj uslova veći od broja parametara (primer: frekvencijska karakteristika data u velikom broju tačaka)



m < n; broj uslova manji od broja parametara (primer: DC analza dva uslova Ic i Vce a više parametara – R_{b1}, R_{b2}, R_c, R_e)



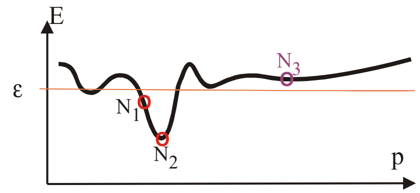
Algoritam optimizacije

4. Provera konvergencije

4.1 $E<\varepsilon$

4.2 $S_p < \varepsilon_p$

4.3 ograničiti broj iteracija



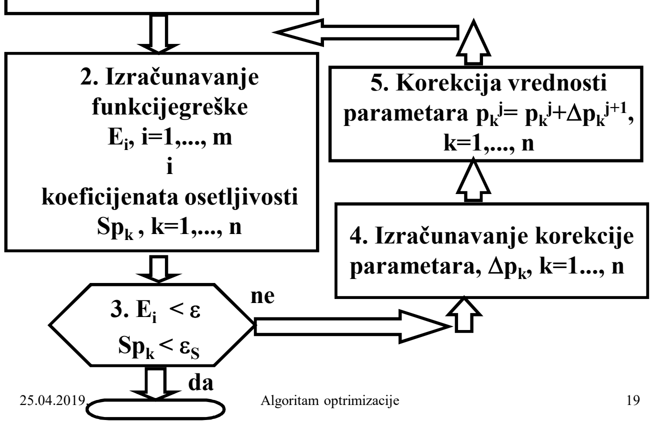
Algoritam optimizacije

5. Korekcija vrednosti parametara

$$p_k^{j+1} = p_k^j + h_k \Delta p_k^{j+1} \qquad k = 1, \dots n$$

$$0 < h_k \le 1$$

Algoritam optimizacije



Optimizacija elektronskih kola (2/3)

Osetljivost elektronskih kola

$$S_p = \frac{\partial(V_o, I_o)}{\partial p} = \frac{\partial F}{\partial p}$$

Apsolutna osetljivost (Koeficijent osetljivosti)

$$Q_p^F = \frac{\partial \ln F}{\partial p} = \frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial p}$$

Polurelativna (polulogaritamska osetljivost)

$$S_p^F = \frac{\partial \ln F}{\partial \ln p} = \frac{\frac{\partial F}{F}}{\frac{\partial p}{p}} = \frac{p}{F}\frac{\partial F}{\partial p}$$

Relativna (logaritamska osetljivost)

$$S_p = \frac{F(p+\Delta p) - F(p)}{\Delta p}$$

Numeričko izračunavanje osetljivosti?

Neracionalno!

Postoji efikasni način da se uz dve analize odrede koeficijenti osetljivosti jednog odziva na sve parametre! (Spice .SENSE) 25.04.2019.

Osetljivost odziva na promenu parametara linearnih otpornih kola

Od interesa je da se odrede osetljivosti odziva (napon, V_o i/ili struja grane I_o):

Osetljivost na promene otpornosti $\frac{\partial(V_o, I_o)}{\partial R}$

Osetljivost na promene napona naponskog generatora $\frac{\partial(V_o, I_o)}{\partial E}$

Osetljivost na promene struje strujnog generatora $\frac{\partial(V_o, I_o)}{\partial J}$

Osetljivost odziva na promenu parametara linearnih otpornih kola

Osetljivost na promene parametra NGKN, $V_2=\mu V_1$ $\frac{\partial(V_o, I_o)}{\partial \mu}$

Osetljivost na promene parametra NGKS, $V_2=r_m I_1$ $\frac{\partial(V_o, I_o)}{\partial r_m}$

Osetljivost na promene parametra SGKN, $I_2=g_m V_1$ $\frac{\partial(V_o, I_o)}{\partial g_m}$

Osetljivost na promene parametra SGKS, $I_2=\beta I_1$ $\frac{\partial(V_o, I_o)}{\partial \beta}$

Osetljivost nelinearnih kola

$$i = g(v,p)\ \{ili\ \ v = r(i,p)\},\quad \Delta i = \frac{\partial g}{\partial v}\Delta v + \frac{\partial g}{\partial p}\Delta p$$

Primer dioda:

$$I_d = I_s(e^{\frac{V_d}{kT/q}} - 1) = f(V_d, T,)$$

$$\Delta I_d = \frac{\partial I_d}{\partial V_d}\Delta V_d + \frac{\partial I_d}{\partial T}\Delta T$$

$$\frac{\partial I_d}{\partial V_d} = I_s e^{\frac{V_d}{kT/q}} \frac{\partial\left(\frac{V_d}{kT/q}\right)}{\partial V_d} = I_s e^{\frac{V_d}{kT/q}}\left(\frac{q}{kT}\right);\quad \frac{\partial I_d}{\partial T} = I_s e^{\frac{V_d}{kT/q}} \frac{\partial\left(\frac{V_d}{kT/q}\right)}{\partial T} = I_s e^{\frac{V_d}{kT/q}}\left(-\frac{q}{kT^2}\right)$$

$$\Delta I_d = \frac{\partial I_d}{\partial V_d}\Delta V_d + \frac{\partial I_d}{\partial T}\Delta T = \frac{q}{kT} I_s e^{\frac{V_d}{kT/q}}\left(\Delta V_d - \frac{1}{T}\Delta T\right)$$

Osetljivost u frekvencijskom domenu

Osetljivost izlaznog napona/struje na promenu induktivnosti

$$\frac{\partial(V_o, I_o)}{\partial L} = \frac{\partial(V_o, I_o)}{\partial Z_L}\frac{\partial Z_L}{\partial L} = j\omega\frac{\partial(V_o, I_o)}{\partial Z_L}$$

Osetljivost izlaznog napona/struje na promenu kapacitivnosti

$$\frac{\partial(V_o, I_o)}{\partial C} = \frac{\partial(V_o, I_o)}{\partial Y_C}\frac{\partial Y_C}{\partial C} = j\omega\frac{\partial(V_o, I_o)}{\partial Y_C}$$

Osetljivost u frekvencijskom domenu

Osetljivost izlaznog napona/struje na promenu frekvencije

$$\frac{\partial(V_o, I_o)}{\partial \omega} = \sum_C \frac{\partial(V_o, I_o)}{\partial Y_C}\frac{\partial Y_C}{\partial \omega} + \sum_L \frac{\partial(V_o, I_o)}{\partial Z_L}\frac{\partial Z_L}{\partial \omega}$$

$$\frac{\partial(V_o, I_o)}{\partial \omega} = \sum_C \frac{\partial(V_o, I_o)}{\partial Y_C}(jC) + \sum_L \frac{\partial(V_o, I_o)}{\partial Z_L}(jL)$$

$$\frac{\partial(V_o, I_o)}{\partial \omega} = j\left[\sum_C C\frac{\partial(V_o, I_o)}{\partial Y_C} + \sum_L L\frac{\partial(V_o, I_o)}{\partial Z_L}\right]$$

Osetljivost u frekvencijskom domenu

Osetljivost MODULA izlaznog napona/struje na promenu parametra

$$V_o = |V_o| \cdot e^{j\phi_{V_o}} \quad \Rightarrow \quad \ln(V_o) = \ln|V_o| + j\phi_{V_o}$$

$$\ln|V_o| = \mathrm{Re}\{\ln V_o\} \qquad \Phi_{V_o} = \mathrm{Im}\{\ln V_o\}$$

$$|V_o| = e^{\mathrm{Re}\{\ln V_o\}} \quad \text{i} \quad \phi_{V_o} = \mathrm{Im}\{\ln V_o\},$$

$$\frac{\partial |V_o|}{\partial p} = \frac{\partial e^{\mathrm{Re}\{\ln V_o\}}}{\partial p} = e^{\mathrm{Re}\{\ln V_o\}}\frac{\partial}{\partial p}\mathrm{Re}\{\ln V_o\} = |V_o| \cdot \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{V_o}\boxed{\frac{\partial V_o}{\partial p}}\right\}$$

Osetljivost u frekvencijskom domenu

Osetljivost FAZE izlaznog napona/struje na promenu parametra

$$V_o = |V_o| \cdot e^{j\phi_{V_o}} \quad \Rightarrow \quad \ln(V_o) = \ln|V_o| + j\phi_{V_o}$$

$$\Phi_{V_o} = \mathrm{Im}\{\ln V_o\}$$

$$\frac{\partial \phi_{V_o}}{\partial p} = \frac{\partial \mathrm{Im}\{\ln V_o\}}{\partial p} = \mathrm{Im}\left\{\frac{1}{V_o} \boxed{\frac{\partial V_o}{\partial p}}\right\}.$$

Osetljivost u frekvencijskom domenu

Osetljivost MODULA pojačanja napona/struje izraženog u dB na promenu parametra

$$a_V = 20 \cdot \log|V_o| \quad (dB).$$

$$\frac{\partial a_V}{\partial p} = 20 \cdot \frac{1}{\ln(10)} \cdot \frac{\partial}{\partial p} \ln|V_o| = 8{,}685889 \cdot \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{V_o} \boxed{\frac{\partial V_o}{\partial p}}\right\}.$$

Algoritam optimizacije

Šta treba da znamo?

Elementarno (za potpis)

Cilj optimizacije?

Osnovna (za 6)

1. **Koraci u algoritmu optimizacije?**
2. **Kako se definiše koeficijent osetljivosti odziva na promenu parametra kola?**

Algoritam optimizacije

Šta treba da znamo?

Ispitna pitanja

a) **Izbor početnog rešenja.**

b) **Izračunavanje funkcije greške.**

c) **Izračunavanje korekcije parametara.**

d) **Osetljivost odziva na promenu parametara linearnih otpornih kola.**

e) **Osetljivost odziva na promenu parametara nelinearnih otpornih kola (primer dioda)**

f) **Osetljivost u frekvencijskom domenu (frekvencija, moduo, faza).**

Sledeće nedelje:
Tipovi problema optimizacije elektronskih kola

Projektovanje u s-ravni
Poklapanje koeficijenata

a) Definiše se željena funkcija kola (nule i/ili polovi) $T^*(s)$

b) Odredi se funkcija kola u simboličkom obliku $T(s, \underline{p})$

c) Traže se vrednosti elemenata kola ($\underline{p}$) koje daju željenu funkciju.

Poklapanje koeficijenata

a) Definiše se željena funkcija kola (nule i/ili polovi) Recimo da želimo da funkcija kola ima polove s_1, s_2 i s_3, a da je potrebno naći vrednosti parametara kola p_1, p_2 i p_3 koji to zadovoljavaju.

$$T^*(s) = (s-s_1)(s-s_2)(s-s_3) = $$
$$= s^3-(s_1+s_2+s_3)s^2+(s_1s_2+s_1s_3+s_2s_3)s-s_1s_2s_3 =$$
$$= a_3^*s^3+a_2^*s^2+a_1^*s+a_0^*$$

b) Odredi se funkcija kola u simboličkom obliku $T(s, \underline{p})$

$$T(s, \underline{p}) = a_3(\underline{p})\, s^3+a_2(\underline{p})\, s^2+a_1(\underline{p})\, s+a_0(\underline{p})$$

Poklapanje koeficijenata

c) Traže se vrednosti elemenata kola koje daju željenu funkciju.

Funkcije $T(s)$ i $T^*(s)$ biće jednake ako su im koeficijenti uz odgovarajuće stepene s jednaki.

Zato se funkcija greške definiše za svaki od koeficijenata.

$$E_o = a_o(\underline{p}) - a_o^* b$$
$$E_1 = a_1(\underline{p}) - a_1^* b$$
$$E_2 = a_2(\underline{p}) - a_2^* b$$
$$E_3 = a_3(\underline{p}) - a_3^* b$$

Poklapanje koeficijenata

c) **Traže se vrednosti elemenata kola koje daju željenu funkciju.**

U opštem obliku E je nelinearna funkcija od p:

$E_i = a_i(\underline{p}) - a_i^* b, \quad i=0, 1, 2, 3.$

konstanta b uvedena je kao četvrti parametar

Linearizacijom se dobija

$$E_i^{j+1} = E_i^j + \sum_{k=1}^{4} \left.\frac{\partial E_i}{\partial p_k}\right|_{p_k = p_k^j} \cdot \Delta p_k^{j+1} = 0, \qquad i = 0,1,2,3.$$

$$\sum_{k=1}^{4} \left.\frac{\partial E_i}{\partial p_k}\right|_{p_k = p_k^j} \cdot \Delta p_k^{j+1} = -E_i^j, \qquad i = 0,1,2,3.$$

Poklapanje koeficijenata

c) **Traže se vrednosti elemenata kola koje daju željenu funkciju.**

$$\sum_{k=1}^{3} \left.\frac{\partial a_i(\underline{p})}{\partial p_k}\right|_{p_k = p_k^j} \cdot \Delta p_k^{j+1} - a_i^* \Delta b^{j+1} = -E_i^j, \qquad i = 0,1,2,3.$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial a_0}{\partial p_1} & \frac{\partial a_0}{\partial p_2} & \frac{\partial a_0}{\partial p_3} & -a_0^* \\ \frac{\partial a_1}{\partial p_1} & \frac{\partial a_1}{\partial p_2} & \frac{\partial a_1}{\partial p_3} & -a_1^* \\ \frac{\partial a_2}{\partial p_1} & \frac{\partial a_2}{\partial p_2} & \frac{\partial a_2}{\partial p_3} & -a_2^* \\ \frac{\partial a_3}{\partial p_1} & \frac{\partial a_3}{\partial p_2} & \frac{\partial a_3}{\partial p_3} & -a_3^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta p_1^{j+1} \\ \Delta p_2^{j+1} \\ \Delta p_3^{j+1} \\ \Delta b^{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_0(\underline{p}^j) + b^j a_0^* \\ -a_1(\underline{p}^j) + b^j a_1^* \\ -a_2(\underline{p}^j) + b^j a_2^* \\ -a_3(\underline{p}^j) + b^j a_3^* \end{bmatrix}$$

Poklapanje koeficijenata

c) **Traže se vrednosti elemenata kola koje daju željenu funkciju.**

rešavanjem ovog sistema jednačina određuju se vrednosti Δp_k^{j+1} i Δb^{j+1};

proverava se konvergencija:

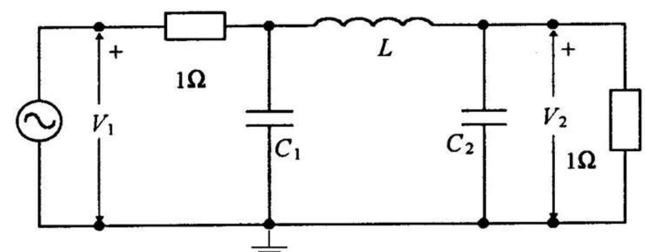
ukoliko kriterijumi nisu zadovoljeni, ažuriraju se vrednosti parametara $p_k^j = p_k^j + \Delta p_k^{j+1}$, k=1, 2, 3 i $b^j = b^j + \Delta b^{j+1}$ i nastavlja se sa iterativnim postupkom;

ukoliko su kriterijumi zadovoljeni optimizacija je završena.

Poklapanje koeficijenata

Primer:

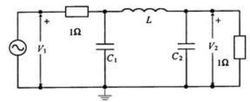
Odrediti vrednosti elemenata C_1, C_2 i L u kolu sa slike, tako da funkcija prenosa ima polove definisane sa $s_1=-1$, $s_{2,3} = -0.5 \pm j\sqrt{1.5}$



10

Poklapanje koeficijenata

Primer:



a) Definisanje željene funkcije kola

$T^*(s) = (s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)$

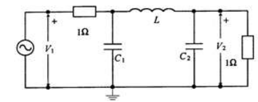
$T^*(s) = (s+1)(s+0.5-j\,(1,5)^{1/2})\,(s+0.5+j\,(1,5)^{1/2}) =$

$= 1.75 + 2.75s + 2s^2 + 1s^3$

$a_o^* = 1.75;\quad a_1^* = 2.75;\quad a_2^* = 2;\quad a_3^* = 1.$

Poklapanje koeficijenata

Primer:



$a_o^* = 1.75;\quad a_1^* = 2.75;\quad a_2^* = 2;\quad a_3^* = 1.$

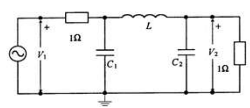
b) Određivanje funkcija kola u simboličkom obliku T(s, p)

$T(s,\underline{p}) = 2\Gamma + [1+\Gamma(C_1+C_2)]s + (C_1+C_2)s^2 + C_1C_2s^3$

$a_0 = 2\Gamma \quad a_1 = 1+\Gamma(C_1+C_2) \quad a_2 = C_1+C_2 \quad a_3 = C_1C_2$

Poklapanje koeficijenata

Primer:



$a_o^* = 1.75;\quad a_1^* = 2.75;\quad a_2^* = 2;\quad a_3^* = 1.$

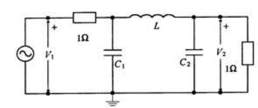
$a_0 = 2\Gamma \quad a_1 = 1+\Gamma(C_1+C_2) \quad a_2 = C_1+C_2 \quad a_3 = C_1C_2$

$E_i = a_i(\underline{p}) - a_i^* b,\quad i = 0, 1, 2, 3.$

$$E_o = 2\Gamma - 1.75b;$$
$$E_1 = 1+\Gamma(C_1+C_2) - 2.75b;$$
$$E_2 = (C_1+C_2) - 2b;$$
$$E_3 = C_1C_2 - 1b.$$

Poklapanje koeficijenata

Primer:



c) Određivanje vrednosti parametara kola

1. Određivanje početnog rešenja

2. Izračunavanje funkcije greške

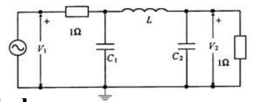
$a_o^* = 1.75;\quad a_1^* = 2.75;\quad a_2^* = 2;\quad a_3^* = 1.$

$a_o = 2\Gamma;\quad a_1 = 1+\Gamma(C_1+C_2)\quad a_2 = C_1+C_2;\quad a_3 = C_1C_2$

$$E_o = 2\Gamma - 1.75b;$$
$$E_1 = 1+\Gamma(C_1+C_2) - 2.75b;$$
$$E_2 = (C_1+C_2) - 2b;$$
$$E_3 = C_1C_2 - 1b.$$

Poklapanje koeficijenata

Primer:



c) Određivanje vrednosti parametara kola

3. Provera konvergencije

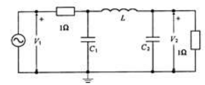
4. Izračunavanje korekcije parametara

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & -1{,}75 \\ \Gamma^j & \Gamma^j & C_1^j+C_2^j & -2{,}75 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ C_2^j & C_1^j & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta C_1^j \\ \Delta C_2^j \\ \Delta \Gamma^j \\ \Delta b^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}75 \cdot b^j - 2 \cdot \Gamma^j \\ 2{,}75 \cdot b^j - 1 - \Gamma(C_1^j + C_2^j) \\ 2 \cdot b^j - C_1^j - C_2^j \\ b_j - C_1^j C_2^j \end{bmatrix}$$

Poklapanje koeficijenata

Primer:

c) Određivanje vrednosti parametara kola



5. Korekcija vrednosti parametara

Itera-cije	C_1	C_2	$1/L$	b
0	1.0	1.0	1.0	1.0
1	0.75	0.75	1.25	1.25
2	1.2	0.4375	1.8	1.6
3	0.877849	0.828379	0.746475	0.853114
4	0.302122	-0.701115	1.015048	1.160054
5	1.970054	0.098379	0.904939	1.034216
6	1.470943	0.533717	0.877071	1.002355
7	1.234339	0.765685	0.875011	1.000012
8	1.111716	0.882836	0.875000	1.000000
9	1.058581	0.941418	0.874999	0.999999
10	1.029290	0.970709	0.875	1.0
11	1.014645	0.985354		
12	1.007322	0.992677		
13	1.003661	0.996338		
14	1.001831	0.998168		
15	1.000916	0.999083		
16	1.000460	0.999539		
17	1.000235	0.999764		
18	1.000118	0.999881		
19	1.000071	0.999928		

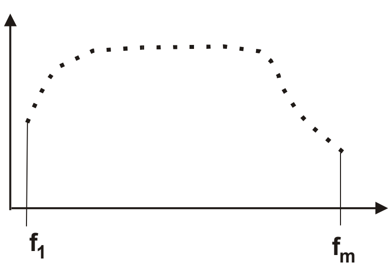
Projektovanje u frekvencijskom domenu

broj parametara manji od broja uslova, *n<m*

Metod najmanje srednjekvadratne greške

(najmanjeg p-tog stepena za p=2)

Frekvencijska karakteristika zadata u mnogo tačaka m>>n



Projektovanje u frekvencijskom domenu

broj parametara manji od broja uslova, *n<m*

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^{m} \left\{ \mathbf{w}(\mathbf{f}_i) \left[\mathbf{F}^*(\mathbf{f}_i) - \mathbf{F}(\mathbf{f}_i, \underline{\mathbf{p}}) \right]^2 \right\} = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{e}_i^2$$

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{w}(\mathbf{f}_i) \left[\mathbf{F}^*(\mathbf{f}_i) - \mathbf{F}(\mathbf{f}_i, \underline{\mathbf{p}}) \right]$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{p}_k} = \mathbf{0}, \quad k = 1, \ldots, n$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{p}_k} = \sum_{i=1}^{m} 2\mathbf{e}_i \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial \mathbf{p}_k} = \mathbf{g}_k(\underline{\mathbf{p}}), \quad k = 1, \ldots, n$$

Linearizacija nelinearne funkcije $\mathbf{g}_k(\underline{\mathbf{p}})$:

$$\mathbf{g}_k(\underline{\mathbf{p}}^{j+1}) = \mathbf{g}_k(\underline{\mathbf{p}}^j) + \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{g}_k(\underline{\mathbf{p}}^j)}{\partial \mathbf{p}_l} \Delta \mathbf{p}_l^{j+1} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{k} = \mathbf{1}, \ldots, \mathbf{n}$$

Projektovanje u frekvencijskom domenu

broj parametara manji od broja uslova, *n<m*

$$g_k(\underline{p}^{j+1}) = g_k(\underline{p}^j) + \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial g_k(\underline{p}^j)}{\partial p_l}\Delta p_l^{j+1} = 0, \quad k = 1, ..., n$$

$$\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial g_k(\underline{p}^j)}{\partial p_l}\Delta p_l^{j+1} = -g_k(\underline{p}^j), \quad k = 1, ..., n$$

$$\sum_{l=1}^{n}\left\{\sum_{i=1}^{m} 2\frac{\partial e_i(\underline{p}^j)}{\partial p_k}\frac{\partial e_i(\underline{p}^j)}{\partial p_l}\Delta p_l^{j+1} + \sum_{i=1}^{m} 2e_i(\underline{p}^j)\frac{\partial^2 e_i(\underline{p}^j)}{\partial p_k \partial p_l}\Delta p_l^{j+1}\right\} = -\sum_{i=1}^{m} 2e_i(\underline{p}^j)\frac{\partial e_i(\underline{p}^j)}{\partial p_k}$$

Projektovanje u frekvencijskom domenu

broj parametara manji od broja uslova, *n<m*

$$\sum_{l=1}^{n}\left\{\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial e_i(\underline{p}^j)}{\partial p_k}\frac{\partial e_i(\underline{p}^j)}{\partial p_l}\Delta p_l^{j+1}\right\} = -\sum_{i=1}^{m} e_i(\underline{p}^j)\frac{\partial e_i(\underline{p}^j)}{\partial p_k}, \quad k = 1, ..., n$$

$$\sum_{l=1}^{n}\left\{\sum_{i=1}^{m} w^2(f_i)\left(\frac{\partial F(f_i, \underline{p}^j)}{\partial p_k}\right)\left(\frac{\partial F(f_i, \underline{p}^j)}{\partial p_l}\right)\Delta p_l^{j+1}\right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} w^2(f_i)\left[F^*(f_i) - F(f_i, \underline{p}^j)\right]e_i(\underline{p}^j)\left(\frac{\partial F(f_i, \underline{p}^j)}{\partial p_k}\right), \quad k = 1, ..., n$$

Sistem od nxn linearnih jednačina

Projektovanje u frekvencijskom domenu

Čebiševljeva aproksimacija - Remezov algoritam

Amplitudska funkcija zadata kontinualno u intervalu $[f_d, f_g]$

Aprokimaciona funkcija takođe zadata kontinualno, tako da je maksimalno odstupanje u intervalu minimalno; (Čebiševljeva funkcija) $[f_d, f_g]$.

Funkcija greške definisana je sa:

$$E^j = \max_{f_d < f < f_g}\left\{w(f)\left[F^*(f) - F(f, \underline{p}^j)\right]\right\}$$

Rešenje iz prethodne iteracije treba da obezbedi *n* promena znaka funkcije greške, gde je *n* broj parametara.

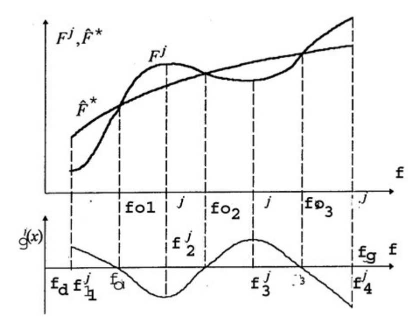
Na taj način funkcija greške imaće *n*+1 tačku sa maksimalnom greškom (ekstremalne tačke), računajući i tačke na granici intervala.

Projektovanje u frekvencijskom domenu

Čebiševljeva aproksimacija - Remezov algoritam

Ekstremalne tačke su f_k, k=1, ..., *n*+1

$f_1=f_d$,..., $f_{n+1}=f_g$



Projektovanje u frekvencijskom domenu
Čebiševljeva aproksimacija - Remezov algoritam

Ekstremalne tačke su f_k, k=1, ..., *n*+1

$$f_k^{\,j} = \begin{bmatrix} f_1^{\,j} = f_d \\ f_2^{\,j} \\ \vdots \\ f_{n+1}^{\,j} = f_g \end{bmatrix}, \quad f_1^{\,j} = f_d < f_2^{\,j} < \ldots < f_{n+1}^{\,j} = f_g$$

Traži se da vrednost greške u ekstremalnim tačkama bude ε.

Tada je $F^*(f_k)-F(f_k, \underline{p}^j) = (-1)^k\varepsilon$, k=1,..., n+1.

$F^*(f_k)-F(f_k, \underline{p}^j) - (-1)^k\varepsilon = g(f_k, \underline{p}^j) = 0$, k=1,..., n+1.

Projektovanje u frekvencijskom domenu
Čebiševljeva aproksimacija - Remezov algoritam

$g(f_k, \underline{p}) = F^*(f_k)-F(f_k, \underline{p}) - (-1)^k\varepsilon = 0$, k=1,..., n+1.

Linearizacijom g_k dobija se:

$$g_k(\underline{p}^{j+1}) = g_k(\underline{p}^j) + \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial g_k(\underline{p}^j)}{\partial p_l}\Delta p_l^{j+1} + \frac{\partial g_k(\underline{p}^j)}{\partial \varepsilon}\Delta\varepsilon^{j+1} = 0, \quad k = 1, \ldots, n+1$$

$$-\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial F(f_k, \underline{p}^j)}{\partial p_l}\Delta p_l^{j+1} - (-1)^k \Delta\varepsilon^{j+1} = -F^*(f_k) + F(f_k, \underline{p}^j) + (-1)^k \varepsilon^j, \quad k = 1, \ldots, n+1$$

Rešavanjem ovog sistema od n+1 jednačine određuju se priraštaji *n* parametara Δp_k^{j+1} i $\Delta\varepsilon^{j+1}$.

Projektovanje u frekvencijskom domenu
Čebiševljeva aproksimacija - Remezov algoritam

Malom modifikacijom može da se fiksira vrednost greške, ali se ostavlja nedefinisana jedna granica intervala

$g(f_k, \underline{p}) = F^*(f_k)-F(f_k, \underline{p}) - (-1)^k\varepsilon = 0$, k=1,..., *n*.

$$g_k(\underline{p}^{j+1}) = g_k(\underline{p}^j) + \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial g_k(\underline{p}^j)}{\partial p_l}\Delta p_l^{j+1} = 0, \quad k = 1, \ldots, n$$

$$-\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial F(f_k, \underline{p}^j)}{\partial p_l}\Delta p_l^{j+1} = -F^*(f_k) + F(f_k, \underline{p}^j) + (-1)^k \varepsilon, \quad k = 1, \ldots, n$$

Rešavanjem ovog sistema od *n* jednačina određuju se priraštaji *n* parametara Δp_k^{j+1}.

Projektovanje u frekvencijskom domenu
Čebiševljeva aproksimacija - Remezov algoritam

Početno rešenje za vrednosti parametzara mora da obezbedi *n* promena znaka funkcije greške. Kako naći te vrednosti?

Odredi se *n* ekvidistantnih tačaka u intervalu $[f_d, f_g]$

$$f_{oi} = \frac{f_g - f_d}{2n}(2i+1), \quad i = 1, \ldots, n$$

Definiše se nova funkcija greške

$e_i(\underline{p}) = F^*(f_{oi})-F(f_{oi}, \underline{p}) = 0$, k=1,..., *n*.

Linearizuje se

$$e_i(\underline{p}^{j+1}) = e_i(\underline{p}^j) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial e_i(\underline{p}^j)}{\partial p_k}\Delta p_k^{j+1} = 0, \quad i = 1, \ldots, n$$

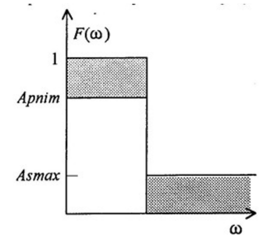
Projektovanje u frekvencijskom domenu
Čebiševljeva aproksimacija - Remezov algoritam

$$-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{f}_{oi},\underline{\mathbf{p}}^{j})}{\partial \mathbf{p}_{k}}\Delta \mathbf{p}_{k}^{j+1}=-\mathbf{F}^{*}(\mathbf{f}_{oi})+\mathbf{F}(\mathbf{f}_{oi},\underline{\mathbf{p}}^{j}),\qquad \mathbf{i}=\mathbf{1},...,n$$

Rešavanjem ovog sistema od *n* jednačina određuju se priraštaji *n* parametara Δp_k^{j+1} na osnovu kojih se dobijaju početna rešenja koja će obezbediti n promena znaka u tačkama f_{oi}.

Projektovanje u frekvencijskom domenu
Čebiševljeva aproksimacija - Remezov algoritam

Primer:

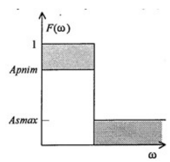


Projektovati filtar čija će amplitudska karakteristika da se nađe u osenčenom opsegu na slici.

Projektovanje u frekvencijskom domenu
Čebiševljeva aproksimacija - Remezov algoritam

Primer:

$$F^2(\omega,\mathbf{a})=\frac{(\omega^2-a_2^2)^2}{(\omega^2-a_2^2)^2+\alpha^2\omega^2(\omega^2-a_1^2)^2}$$



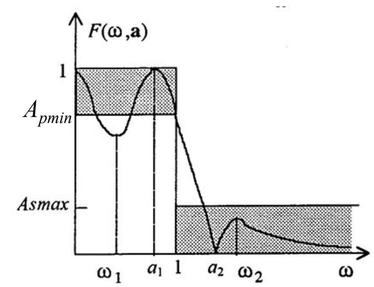
Aproksimaciona funkicija koja obezbeđuje zadovoljenje traženih uslova ako je $\alpha^2=(1/A_{pmin}{}^2-1)(1-a_2{}^2)^2/(1-a_1{}^2)^2$
a a_1 i a_2 su nepoznati parametri

Projektovanje u frekvencijskom domenu
Remezov algoritam

Primer:

$F(\omega_1,\mathbf{a})=A_{pmin}$
$F(\omega_2,\mathbf{a})=A_{smax}$.

Iter.	a_1^2	a_2^2	ω_1^2	ω_2^2
0	0.6900	3.000	0.2570	8.053
1	0.6918	3.002	0.2578	8.057
3	0.7093	3.022	0.2649	8.092
4	0.7755	3.113	0.2919	8.272
5	0.7858	3.142	0.2959	8.344
6	0.7896	3.153	0.2974	8.370



Za $A_{pmin}{}^2 = 0.9$ i $A_{smax}{}^2 = 0.05$

Moguće međurešenje